

Bestimmung der optimalen Phasenverschiebung für Kompensatoren für die Ellipsometrie.

Florian Dufey

1. März 2021

1 Fehler durch beschränkte Erkennbarkeit der Dunkelstellung

Die elliptische Polarisation von Licht wird durch den Azimut ψ der grossen Hauptachse gegen die x-Achse und die Elliptizität

$$\theta = \arctan \left(\frac{q_k}{q_g} \right)$$

beschrieben. Hierbei sind q_g und q_k jeweils die Längen der grossen und kleinen Hauptachse, siehe 1.

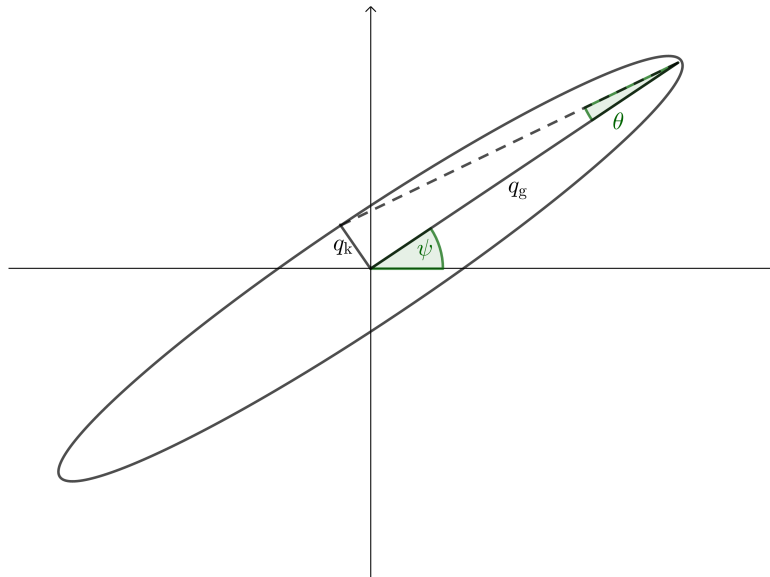


Abbildung 1: Definition der Elliptizitätsparameter.

Die durch die Paare (ψ, θ) gekennzeichneten Polarisationszustände können vorteilhafterweise durch Punkte auf einer Kugelschale, der sogenannten Poincarékugel dargestellt werden. Dabei werden die verdoppelten Winkel 2ψ und 2θ als Längen- und Breitengrade verwendet. Lineare Polarisationszustände kommen dabei auf dem Äquator zu liegen, wobei orthogonale Polarisationszustände auf antipodalen Punkten zu liegen kommen. Links- und rechtszirkulare Polarisierungen belegen hingegen die beiden Pole. Auch die Aktionen von doppelbrechenden Elementen auf Polarisationszustände können auf der Poincarékugel dargestellt werden, siehe Fig. 2. Sie wirken als Drehachsen deren Lage auf dem Äquator wiederum durch den doppelten Winkel zwischen den Auslöschungslagen und der x-Achse gegeben ist. Der Drehwinkel um diese Achsen ist durch die Phasendifferenz der Verzögerungsplatte gegeben. Bei einem λ Plättchen beträgt dieser 2π oder 360° , bei einem $\lambda/4$ Plättchen $\pi/2$ oder 90° .

Hier sei auch auf den Wikipediaeintrag zur Poincarékugel verwiesen:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9-Kugel>

Die Poincarékugel kann auch stereographisch auf eine Ebene abgebildet werden. Liegen die interessierenden Punkte nur wenig vom Berührungspunkt der Ebene und der Kugel entfernt, so ist die Verzerrung vernachlässigbar. Dies ist besonders nützlich für die Darstellung elliptischer Polarisationszustände wie sie aus durch Reflexion bei senkrechtem Einfall auf doppelbrechende und eventuell absorbierende Substanzen eintreten, dem typischen Anwendungsgebiet der Auflicht-Polarisationsmikroskopie. Das dabei entstehende elliptisch polarisierte Licht wird durch einen drehbaren, doppelbrechenden Kompensator in linear polarisiertes verwandelt dessen Polarisationsachse anschliessend mit einem ebenfalls drehbaren Polarisator, dem sogenannten Analysator festgestellt werden kann. Die Theorie hierzu wurde von Berek entwickelt[3]. Der beobachtete Azimut des Kompensators sei g , der des Analysators a . Der Phasenwinkel des Kompensators sei $-\Delta$. Die Verhältnisse sind in Abb. 3 dargestellt.

Der Polarisationszustand $X = (\psi, \theta)$ wird durch Rotation um g auf den linearen Polarisationszustand a entlang der gestrichelten Linie gedreht.

Berek und Marx [1] haben sich nun die Frage gestellt, für welchen Winkel Δ der Fehler in g und a , der von der Impräzision der Auslöschungslagen herrührt, minimal wird. Sie nahmen dabei an, dass es in einem Umkreis um die wirkliche Auslöschungslage (a_0, g_0) herum nicht möglich ist, die Aufhellung mit dem Auge zu detektieren, sondern erst, wenn ein gewisser Schwellenwert überschritten wird. In Abb. 3 ist dies durch einen kleinen Kreis um a herum angedeutet. Sei nun

$$R_\Delta = \begin{pmatrix} \cos \Delta & -\sin \Delta \\ \sin \Delta & \cos \Delta \end{pmatrix},$$

so gilt offensichtlich

$$R \begin{pmatrix} \psi_0 - g_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - g_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei wir mit dem Index 0 zum Ausdruck bringen, dass es sich um die Idealwerte handelt, wenn die Feststellung der Auslöschungslagen präzise möglich wäre.

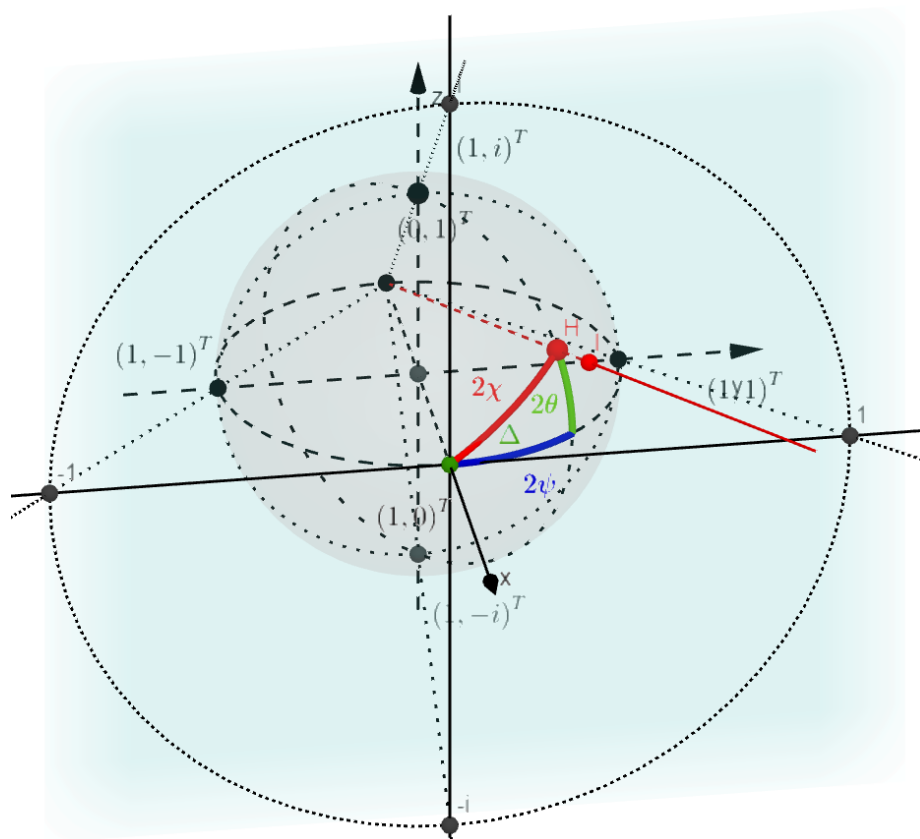


Abbildung 2: Die Poincarékugel und die stereographische Projektion. Der Punkt H auf der Kugel mit Azimut 2ψ und Höhe 2θ wird auf den Punkt I auf der Fläche abgebildet. Der Großkreis senkrecht zur Projektionsrichtung wird auf den Einheitskreis abgebildet.

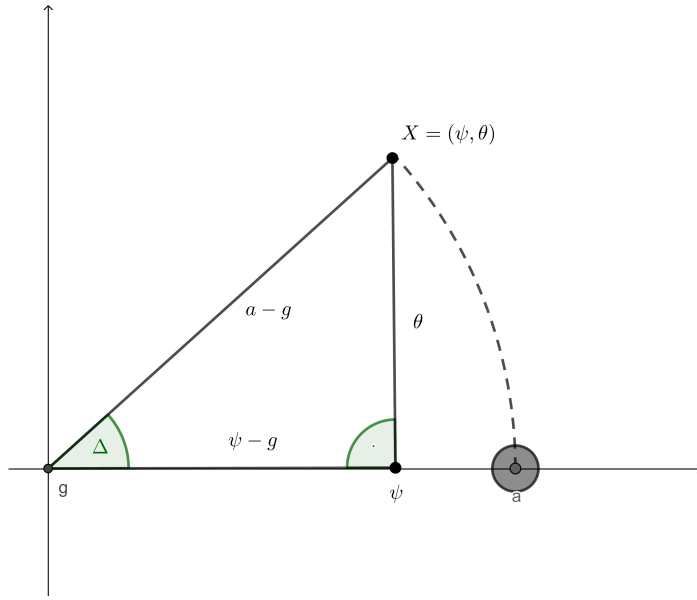


Abbildung 3: Stereographische Projektion in die Tangentialebene an die Poincarékugel. Für kleine Winkel θ und $\psi - g$, können die Verzerrungen durch die Projektion vernachlässigt werden und das Problem reduziert sich auf eines der ebenen Geometrie. Der graue Kreis um a ist die Region der Polarisierungen deren Helligkeit nicht von der exakten Auslöschung unterschieden werden kann.

Setzen wir $r_0 = (\psi_0, \theta_0)^T$ und $s_0 = (a_0, g_0)^T$, schreiben wir kompakter

$$r_0 = \underbrace{\left(R^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}_{=: G_\Delta} s_0 = G s_0. \quad (1)$$

Explizit lautet

$$G_\Delta = \begin{pmatrix} \cos(\Delta) & 1 - \cos(\Delta) \\ \sin(\Delta) & -\sin(\Delta) \end{pmatrix}.$$

Ist die Messung, insbesondere die Bestimmung der Auslöschungsposition nun fehlerbehaftet, so gilt

$$R \begin{pmatrix} \psi_0 - g' \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' - g' + \delta_x \\ \delta_y \end{pmatrix}$$

oder

$$r_0 = G s' + R^T \delta,$$

mit $s' = (a', g')^T$ und $\delta = (\delta_x, \delta_y)^T$. Subtrahiert man Gl. 1 erhält man

$$G_\Delta(s' - s_0) + R^T \delta = 0,$$

oder

$$\delta_s = -G_\Delta^{-1} R^T \delta. \quad (2)$$

Nach der Annahme gilt nun $|\delta| \leq \epsilon$. Die maximale Abweichung in a und g ist dann

$$|\delta_s| = \|G_\Delta^{-1}\| \epsilon,$$

wobei die Norm der Matrix G_Δ^{-1} durch

$$\|G_\Delta^{-1}\| = \max \sqrt{\text{Eigenwert}((G_\Delta^T G_\Delta)^{-1})}$$

gegeben ist. Stattdessen können wir auch

$$\|G_\Delta^{-1}\| = \left(\min \sqrt{\text{Eigenwert}(G_\Delta^T G_\Delta)} \right)^{-1}$$

verwenden. Bezeichnen wir den Eigenwert mit λ , so bestimmt sich dieser aus

$$\det(G_\Delta^T G_\Delta - \lambda E) = 0,$$

wobei E die 1x1 Einheitsmatrix ist. Explizit findet man

$$\lambda_{\min} = \left(\frac{3 - 2 \cos(\Delta) - \sqrt{5 - 12 \cos(\Delta) + 8 \cos^2(\Delta)}}{2} \right),$$

vergleiche Abb. 4. Diese Funktion stimmt bis auf einen irrelevanten Skalenfaktor $\sqrt{2}$ mit der von Berek abgeleiteten Funktion überein, vergleiche Abb. 5.

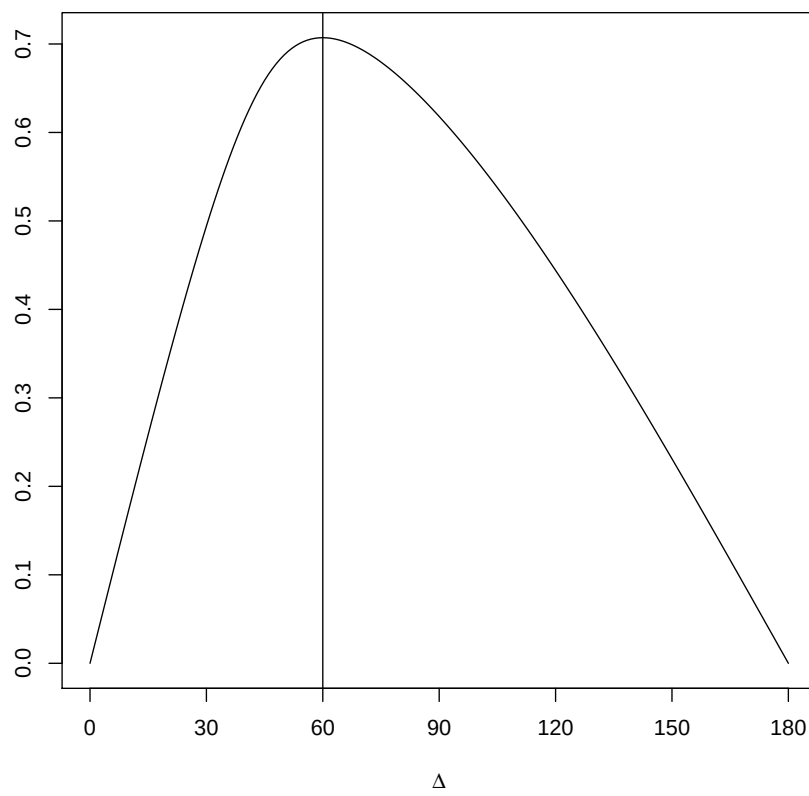


Abbildung 4: Wurzel des kleinsten Eigenwerts von $G^T G$ als Funktion von Δ .

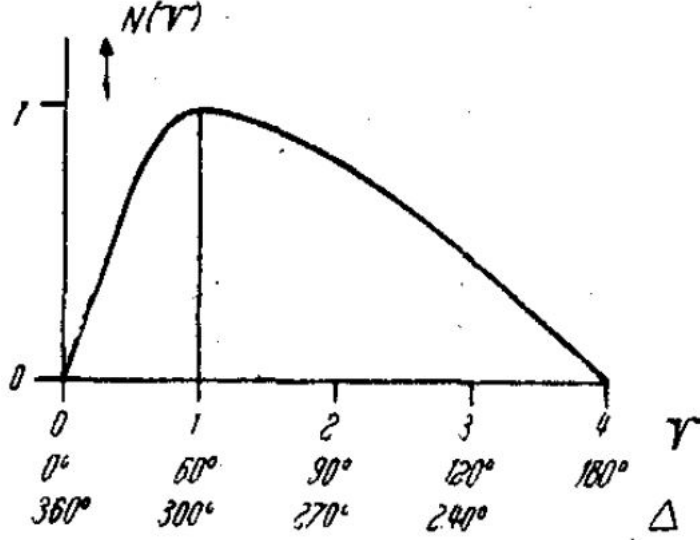


Abbildung 5: Funktion N aus Berek und Marx.

Insbesondere haben diese Funktionen bei 60° ein Maximum, so dass die Norm der inversen Matrix dort ein Minimum hat. Dies entspricht einem $\lambda/6$ -Verzögerungsplättchen.

Allerdings stellt sich doch die Frage, ob dieses Ergebnis wirklich relevant ist. Schliesslich handelt es sich bei den Winkeln a und g nur um Hilfsgrössen die zur Berechnung der eigentlich interessierenden Elliptizitätsparameter ψ und θ benötigt werden.

Um die Schätzwerte ψ' und θ' zu berechnen, ersetzen wir in Gleichung 1 alle Grössen mit Index 0 durch gestrichene Grössen,

$$r' = Gs'; \quad (3)$$

nachdem wir die Fehler δ ja nicht kennen, bleibt uns nichts anderes übrig, als die s' so zu behandeln, als wären sie fehlerfrei.

Den daraus resultierenden Fehler in r erhalten wir, indem wir von Gleichung 3 die Gleichung 1 abziehen,

$$\delta_r = G\delta_s = -R^T\delta, \quad (4)$$

wobei wir im letzten Schritt Gleichung 2 benutzt haben. Nun ist aber R^T eine orthogonale Matrix, d. h. von Norm 1 und damit

$$|\delta_r| = |\delta| \leq \epsilon.$$

Der Fehler in den Elliptizitätsparametern ψ und θ ist also unabhängig von der Phasenverzögerung Δ des Kompensators!

Mithin können alle Brace-Köhler Kompensatoren gleichermaßen ohne Genauigkeitsverlust verwendet werden, wobei eine Vermessung von θ nur möglich ist, wenn $|\sin(\Delta)| \geq |\sin(2\theta)|$. Der maximale Messbereich wird also mit einem $\lambda/4$ -Kompensator abgedeckt. Es gibt heute sogenannte achromatische Verzögerungsplättchen, die über den ganzen optischen Bereich hinweg eine fast konstante Verzögerung von $\lambda/4$ aufweisen. Für einen Wert von $\lambda/4$ vereinfacht sich die Interpretation der Messergebnisse auch ganz erheblich, weil, wie man aus Gleichung 1 leicht ersieht, $\psi = g$ und $\theta = a - g$ wird. Dies ist auch aus den Graphiken 2 und 3 leicht zu erschliessen.

2 Fehler aufgrund der Einstellgenauigkeit von g und a

Im Gegensatz zu Berek, sieht Cameron [2] die Hauptfehlerquelle eher in der beschränkten Genauigkeit, mit der die Kompensator- und Analysatorpositionen eingestellt und abgelesen werden können. Der Einfluss dieser Fehler auf die berechneten Elliptizitätskenngrößen s ist wieder durch die erste Gleichung in Formel 4 gegeben, um den maximalen Fehler zu berechnen, brauchen wir diesmal allerdings die Norm von G_Δ selbst und nicht von seiner Inversen, wie vorher. Diese ist

$$\lambda_{\max} = \left(\frac{3 - 2 \cos(\Delta) + \sqrt{5 - 12 \cos(\Delta) + 8 \cos^2(\Delta)}}{2} \right),$$

vergleiche Abb. 6.

Fehler in a und g haben unterschiedlichen Einfluss auf ψ und θ , vergleiche Abb. 7. Während die Genauigkeit für ψ für den Berek empfohlenen Winkel von $\Delta = 60^\circ$ am grössten ist, steigt für θ die Genauigkeit, je kleiner der Winkel Δ . Für sehr kleine Winkel Δ verlässt man den Gültigkeitsbereich der gemachten Approximationen, weil das Dreieck sehr langgestreckt wird. Δ kann nicht kleiner als 2θ gewählt werden. In diesem Fall verschwindet dann aber auch der Fehler in θ bei genauerer Behandlung. Für kleine Δ ist der maximale Fehler in ψ nur wenig grösser, als der minimale Fehler, der für $\Delta = 60^\circ$ erhalten wird. Von daher würde sich die Verwendung von Brace-Köhler Kompensatoren, deren Gangunterschied möglichst wenig über dem Grenzwert von 2θ liegt, empfehlen. Natürlich muss deren Gangunterschied Δ dann mit hoher Genauigkeit bekannt sein. Andererseits haben wir gesehen, dass der Fehler in g , der von der Erkennbarkeit der Dunkelstellung herrührt, für kleine Δ stark zunimmt und den Einstellfehler irgendwann überschreitet. Von daher ist der Genauigkeitsgewinn durch Verwendung von Kompensatoren mit kleinem Δ auch beschränkt.

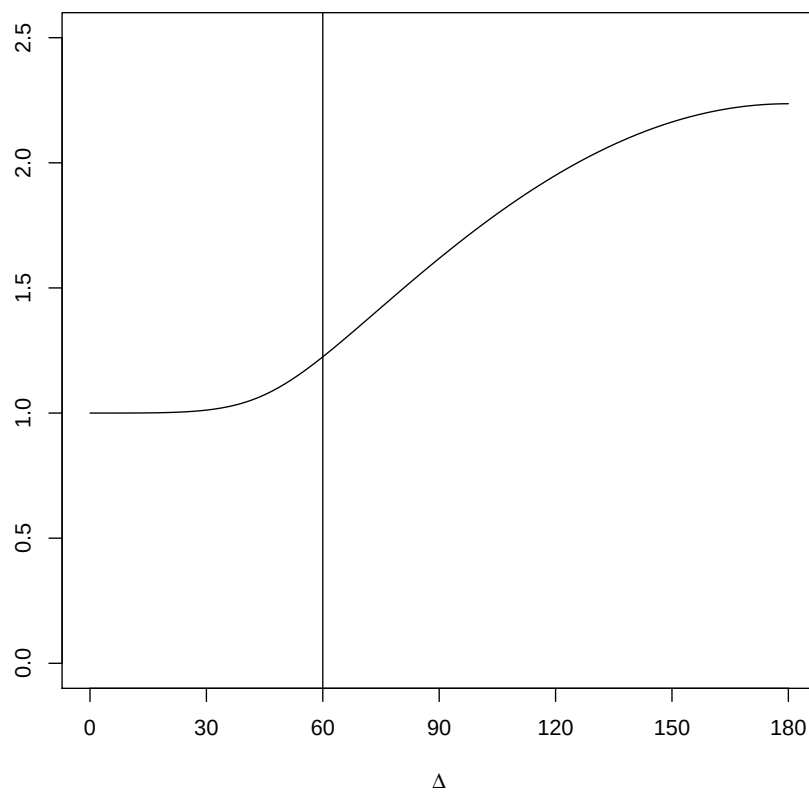


Abbildung 6: Wurzel des grössten Eigenwerts von $G^T G$ als Funktion von Δ .

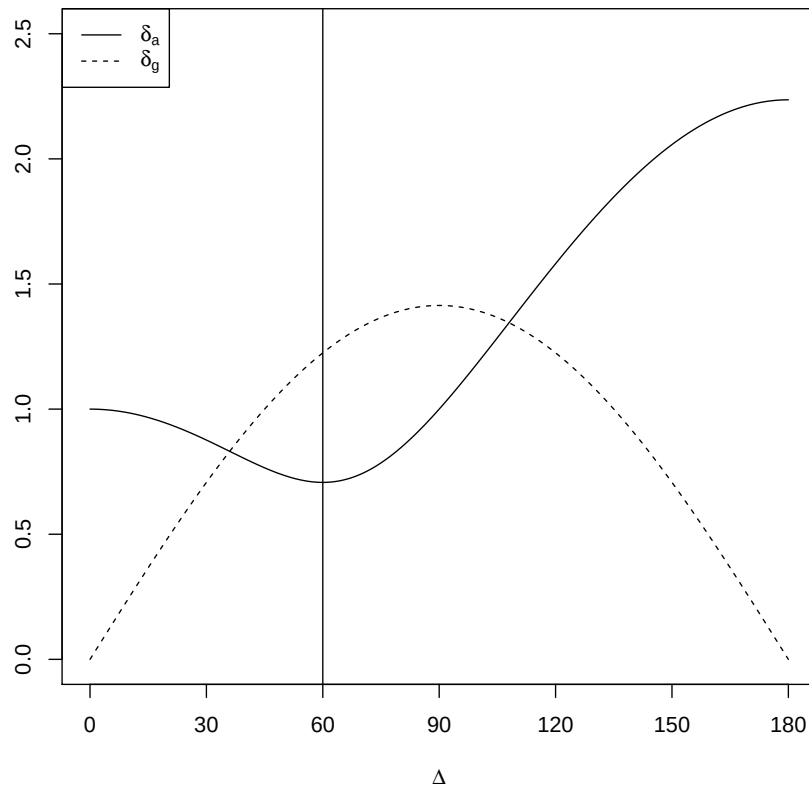


Abbildung 7: Maximaler Fehler in ψ und θ bezogen auf den Gesamtfehler in a und g .

Literatur

- [1] M Berek and H Marx. Theorie einer Abwandlung der Methode von Macculagh, J und Stokes, GG zur Analyse elliptisch polarisierten Lichts für den Sonderfall langgestreckter Schwingungsellipsen. *Optik*, 3(5):444–450, 1948.
- [2] Eugene N Cameron. *Ore microscopy*. John Wiley & sons, Inc., New York, 1961.
- [3] Friedrich Rinne and Max Berek. *Anleitung zu optischen Untersuchungen mit dem Polarisationsmikroskop*. E. Schweizerbart, 1953.